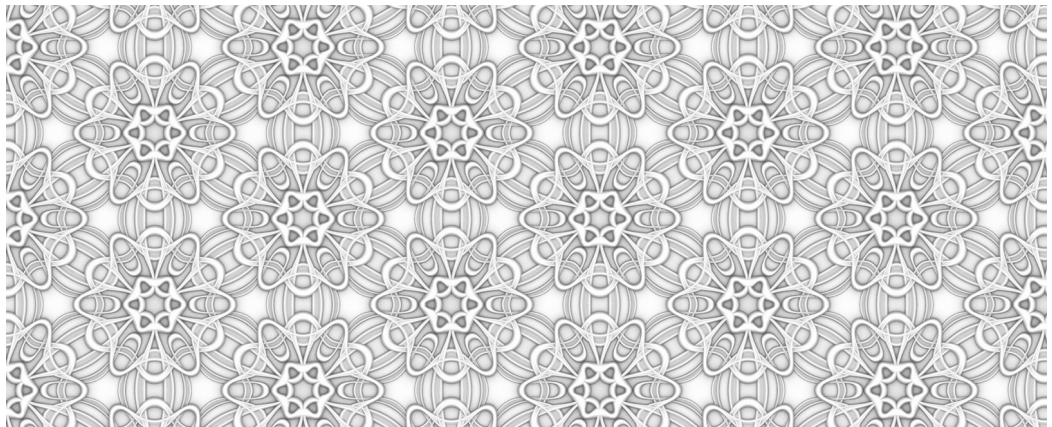
Modelli procedurali per l'ideazione, il controllo e la generazione della forma libera negli apparati decorativi

Jessica Romor
Graziano Mario Valenti

Abstract

Limitatamente interessato da problematiche di carattere strutturale o funzionale, il progetto degli apparati decorativi – sia alla scala architettonica, sia alla scala del prodotto industriale – fin dalle origini ha frequentemente sperimentato l'uso della forma libera: sia da sola, sia articolata all'interno di *pattern* modulari, in un gioco di relazioni con altre forme luogo geometrico.
La necessità di controllare e rappresentare le geometrie di un apparato decorativo, durante la fase di ideazione (progetto) o di conoscenza (rilievo), ha motivato la ricerca di una metodologia per la definizione e lo sviluppo di procedure generative utili a modellarne tridimensionalmente la forma. La soluzione adottata predilige una modalità descrittiva dell'*ekphrasis* digitale nella quale i vincoli di natura geometrica sono distinti e prioritari rispetto alle forme ad essi relazionate. Tale strategia consente un elevato livello di personalizzazione e versatilità della forma generata, nonché l'uso combinato di forme libere e forme luogo geometrico, queste ultime intese come singolarità delle prime. I modelli esemplificativi sperimentati hanno tratto ispirazione da alcuni *pattern* decorativi propri della cultura islamica: i modelli, inizialmente studiati nell'ambito di un singolo poligono regolare, sono stati successivamente perfezionati per essere impiegati nella tassellazione del piano e nella caratterizzazione delle superfici dei solidi platonici e archimedei.

Parole chiave
decorazione, pattern, forma libera, NURBS, Visual Programming Language

Esempio di tassellazione del piano. Elaborazione grafica degli autori.

doi.org/10.3280/oa-1016-c455

Introduzione

Lo sviluppo e l'impiego di strumenti sempre più sofisticati di rappresentazione e costruzione di ogni tipo di prodotto – dalla scala dell'oggetto a quella dell'edificio – ha portato, nel tempo, ad una crescita esponenziale delle possibilità di concezione ed espressione della forma. Una forma la cui rappresentazione, non più dipendente dai limiti strumentali e operativi – riga e compasso – caratteristici del disegno tradizionale, può superare l'ambito esistenziale dei luoghi geometrici per manifestarsi pienamente libera.
Una tale evoluzione, per connaturarsi pienamente positiva, non può limitarsi all'uso intuitivo di strumenti e tecniche innovative, per quanto queste siano artificialmente intelligenti: se si intende mantenere il controllo intellettuale della genesi della forma e della sua natura geometrica, è necessario sviluppare parallelamente la consapevolezza di chi opera con essa.
Appare dunque rilevante la necessità di approfondire i processi ideativi (progetto) e conoscitivi (rilievo) della forma, considerando parallelamente due aspetti: da un lato il processo di transizione dalla forma immaginata, alla sua trasposizione sintetica; dall'altro, la transizione da una logica per luoghi geometrici, ad una in cui, anche grazie ad essi, si giunge al controllo della forma libera.

Dalla libertà ai gradi di libertà: transizioni della forma

Nella progettazione contemporanea, il termine 'forma libera' – *freeform*, "Not created according to standard forms or structures", come indica l'*Oxford Dictionary* – ha assunto un'importanza notevole, come a voler estremizzare proprio la grandissima libertà espressiva che le attuali tecnologie progettuali e costruttive possono raggiungere, senza doversi limitare a delle geometrie direttamente controllabili. Nel processo di lettura della forma, esso è riferito a ciò che non è riconducibile a luoghi geometrici, a strutture formali esprimibili analiticamente, e per il quale non è possibile dunque rintracciare una legge o un sistema di leggi in grado di determinare la natura geometrica di un oggetto in ogni sua parte in modo continuo.
In questo termine esiste una grande ambiguità lessicale, particolarmente evidente quando la forma libera è impiegata per il progetto di un prodotto industriale o di un'architettura ed è 'ingegnerizzata' per via digitale. L'ambiguità scaturisce dalla considerazione che una forma libera, per essere prodotta o cantierizzata, necessita di una serie di passaggi di controllo, che includono una vera e propria riprogettazione, tali da porre talmente tanti vincoli che al termine del processo sembrerebbe singolare continuare a chiamarla forma libera.
Una soluzione, da noi e da diversi altri ricercatori e progettisti perseguita, è da rintracciarsi nell'apparente ossimoro di 'controllo della forma libera', ove con questa azione si vogliono individuare quei processi di riprogettazione di un segno ideato, non banalmente descrivibile per via geometrica, capaci di analizzare, potenziare e rendere univocamente ripetibile a fini costruttivi detto segno, senza tradirne l'intento e la forza comunicativa originaria [Pottman 2007; Pottman, 2015; Pottman 2017].
A partire da una qualsivoglia forma libera, considerata continua nella sua singolarità, si rilevano in modo discreto e critico delle caratteristiche, delle relazioni fra le parti nelle quali essa può essere scomposta (proporzioni, concavità/convessità, simmetrie, continuità, direzioni/giaciture, etc.) che consentono di ricavare a posteriori delle regole di genesi e composizione della forma: dei vincoli che determinano i suoi gradi di libertà [Valenti 2022]. Se pensiamo infatti alle superfici di forma libera in architettura e design, appare chiaro come tali vincoli, quando volti, ad esempio, ad individuare aste rettilinee, tasselli quadrangolari piani e in assenza di torsione, siano essenziali ad agevolarne la realizzazione [Pottman, 2007, 2015, 2017].
Posta dunque questa transizione dalla libertà ai gradi di libertà – tipica della discretizzazione a posteriori della forma libera, che muove dalla complessità verso la sintesi – si propone qui una metodologia diretta di ideazione della forma libera, proprio partendo, viceversa, da una serie di vincoli e regole procedurali di genesi formale – individuati per uno specifico caso applicativo – posti a priori. Descritta la regola in forma di *ekphrasis* digitale, con l'ausilio dei sistemi di programmazione visuale (VPL), è facile partire da una soluzione per poi esplorar-

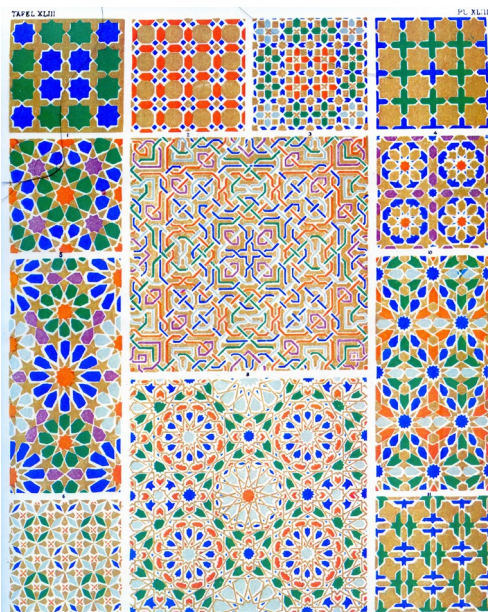
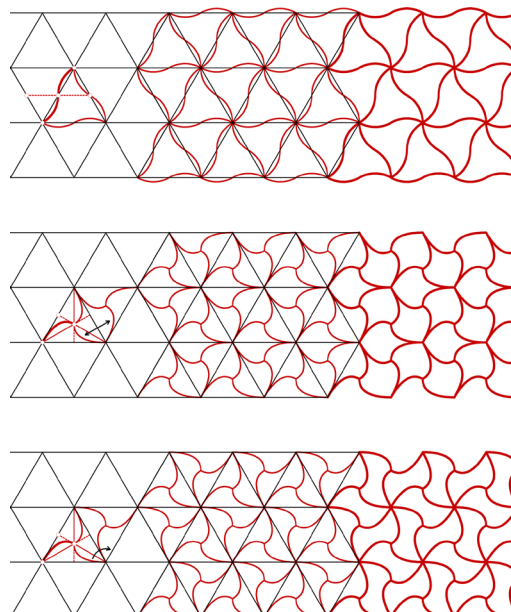



Fig. 1. Decorazioni islamiche. Jones 1856, tavola 43.

Fig. 2. Schematizzazione di diversi tipi di pattern generati dall'evoluzione di una stessa griglia triangolare equilatera. Elaborazione grafica degli autori.

ne e derivarne infinite altre, realizzando così modelli parametrici in grado di soddisfare 'su misura' le più varie esigenze applicative.
Muovendo da questi presupposti, la ricerca oggetto di questo contributo illustra un percorso teorico e metodologico di costruzione di elementi tridimensionali, realizzati con procedure generative improntate al controllo parametrico e formale di geometrie libere, volte alla massima varietà espressiva.

Sulla descrizione procedurale per la decorazione

Posto l'interesse per la generazione del singolo prodotto di forma libera, questa metodologia ha una enorme potenzialità applicativa nella produzione di elementi decorativi, sia nella piccola scala del prodotto industriale, sia alla grande scala dell'architettura. Infatti, la modellazione procedurale e i sistemi di prototipazione rapida a controllo numerico hanno rilanciato la possibilità di dare nuova vita e nuova forma a qualità decorative del progetto [Tedeschi 2011], da tempo ampiamente trascurate per impostazioni culturali e convenienza economica.
Abbiamo scelto di applicare la sperimentazione al tema del *pattern*, in continuità con una secolare tradizione decorativa nella quale il controllo geometrico ha svolto indubbiamente un ruolo fondamentale e decisivo [Jones 1856; Grünbaum 1986; Garofalo 2017; Burrows 2018; Burrows 2019]. Pensiamo ad esempio al vasto patrimonio dei motivi geometrici islamici (figg. 1, 2), che con sapienza e originalità esplorano le interazioni di linee orizzontali, verticali, inclinate e curve, nello spazio bidimensionale, in un sistema 'rami-radici' in cui ogni elemento è collegato agli altri e non può essere rimosso, prestando una costante attenzione al controllo della continuità fra gli elementi [Jones 1856]. La tassellazione del piano avviene tramite aggregazioni di punti, linee, angoli, griglie, poligoni e circonferenze tangenti di differenti misure e altri sistemi che anticiparono l'introduzione dei frattali e dei vettori, organizzati secondo precisi schemi che posso essere suddivisi in griglie geometriche, suddivisioni poligonali tassellate, strutture radiali, circonferenze tangenti, aggregazione dei poligoni nidificati, tasselli modulari [Burrows 2016; Burrows 2018; Burrows 2019]. Inoltre, è naturale considerare anche la trasposizione di queste logiche geometriche nello spazio tridimensionale, operando tramite aggregazioni di sfere, poliedri e prismi [Burrows 2018] che descrivono transizioni tridimensionali fra diverse partizioni architettoniche [Garofalo 2010]. È infatti proprio da questi schemi geometrici, e dai principi di tassellazione del piano e dello spazio, che andremo a trarre dei sistemi di vincoli, intesi come espressione

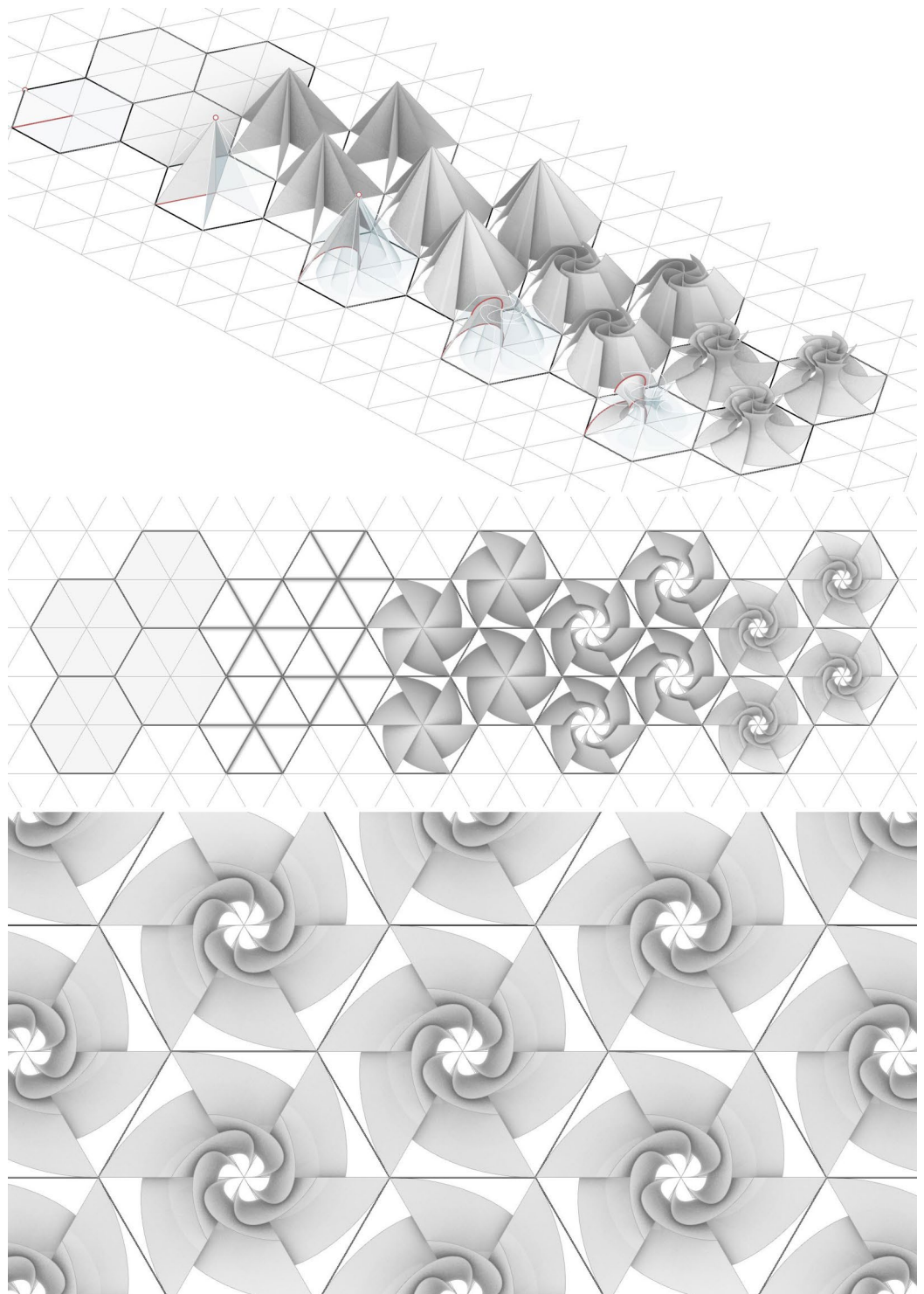



Fig. 3. Esemplificazione di transizione da una forma semplice luogo geometrico, ad una più complessa, di forma libera, ma opportunamente vincolata. Elaborazione grafica degli autori.

di una serie di condizioni geometriche che determineranno i gradi di libertà delle forme progettate, tanto nel piano, quanto nello spazio e nella sua evoluzione temporale. Prima di passare alla sperimentazione vera e propria, ci serviamo di una esemplificazione propedeutica per iniziare a ragionare su come una struttura regolare, rigida e controllata in modo continuo, possa generare un sistema di vincoli atti a creare una forma con determinati gradi di libertà, attraverso un percorso di transizione che muove da una semplice forma luogo geometrico (fig. 3). Supponiamo di partire da una tassellazione monoedrica esagonale, per la quale intendiamo creare un motivo decorativo che si ripete in ogni poligono. Con-

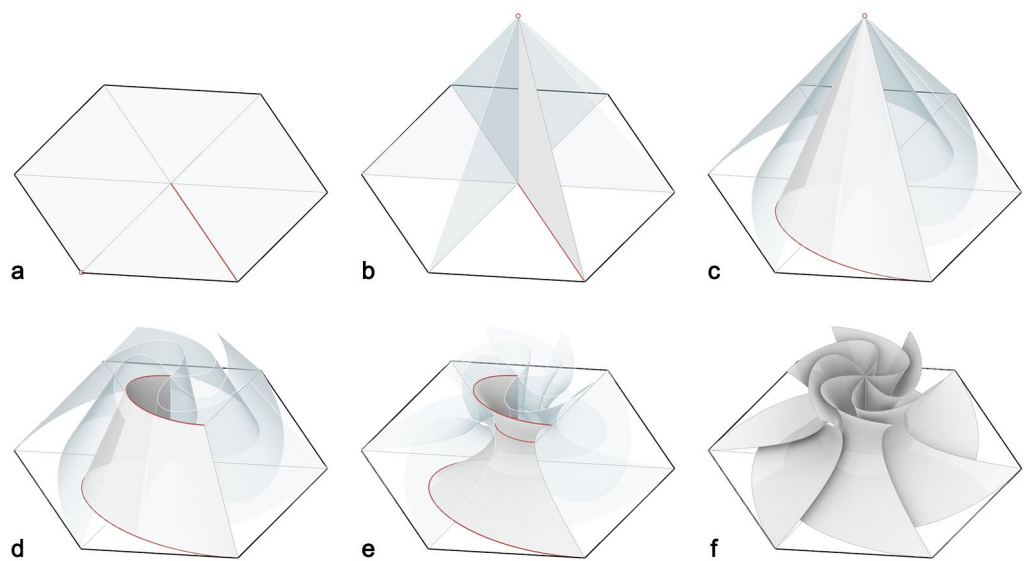



Fig. 4. Applicazione di vincoli a monte e in itinere nella transizione verso la creazione di una forma libera. Elaborazione grafica degli autori.

centriamo dunque l'attenzione su un singolo esagono, considerandone la superficie piana. La prima scelta di carattere progettuale consiste nella suddivisione radiale del poligono nei sei triangoli equilateri che lo compongono, ognuno dei quali sarà sottoposto ad un processo di trasformazione controllato da vincoli, individuati a priori o generati *in itinere* (fig. 4). La prima trasformazione consiste nel ribaltare ogni triangolo nello spazio lungo gli assi dell'esagono (fig. 4b). Poi, modifichiamo la base del triangolo, che da segmento retto diventa una curva cubica compresa in un poligono di controllo i cui vertici e segmenti vengono posti in una specifica relazione con l'esagono di partenza al fine di controllare incidenze e tangenze (fig. 4c). La superficie triangolare, rigenerata, diventa un cono, che viene poi troncato con un piano ad una data quota (fig. 4d). Ricaviamo ora un vincolo in itinere, sezionando nuovamente il cono con un piano che consente di ottenere una curva intermedia, da sottoporre ad una ulteriore operazione di modifica, ricollocando i punti di controllo (fig. 4e). Rigeneriamo infine la superficie per interpolazione utilizzando la nuova curva di sezione e completiamo il modello attraverso opportune operazioni di simmetria radiale (fig. 4f) e di traslazione.

Sperimentazione

La sperimentazione applicativa è stata articolata nella realizzazione di due modelli procedurali esemplificativi: il primo prende origine da un *pattern* esagonale, il cui disegno è stato 'aumentato' per evolvere dallo spazio bidimensionale a quello tridimensionale e dalla forma luogo geometrico alla forma libera; il secondo, similmente, raggiunge gli stessi obiettivi e, aumentando significativamente la separazione fra il vincolo e la forma geometrica ad esso associata, rende ancora più manifesta la generalizzazione del processo generativo della forma e la varietà espressiva e applicativa con essa raggiungibile.
In entrambi casi, si noti come la forma libera, trasformata nel suo aspetto, possa in alcuni istanti coincidere con la forma luogo geometrico: questa condizione, derivata dalla teoria della rappresentazione di curve e superfici NURBS, sostiene la visione 'generalizzata' del luogo geometrico come caso singolare della forma libera. Nello specifico del primo caso applicativo il modulo esagonale di partenza è stato diviso in sei parti, secondo le diagonali; ognuno dei triangoli derivati è stato ulteriormente diviso in due parti, generando così un trapezio e un triangolo. Nello sviluppo della logica generativa sono stati stabiliti i seguenti principi evolutivi: i vertici del triangolo possono muoversi lungo l'asse Z; il lato maggiore del trapezio può evolvere in una coppia di coniche speculari e collegate in continuità di tangenza (gola); il lato minore del trapezio può essere trasformato in una conica. La trasformazione da linea retta in una conica, avviene anche per le proiezioni, sul piano principale XY, dei cateti del triangolo e dei lati obliqui del trapezio: queste curve sono estruse

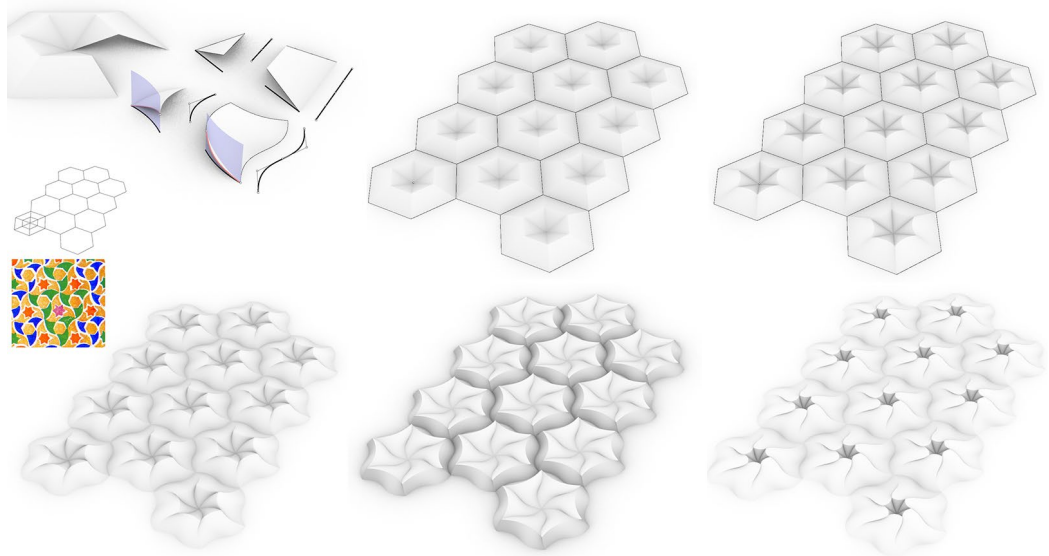



Fig. 5. Struttura geometrica del modulo di base ed esemplificazioni della sua variazione. Elaborazione grafica degli autori.

in forma di cilindri, così da individuare su di essi le corrispondenti curve geodetiche necessarie a collegare nello spazio i vertici delle superfici situati a quote differenti (fig. 5).
Il secondo caso applicativo prende invece ispirazione da una singola formella decorativa, rappresentata nelle fonti di origine in forma di quadrato e da noi generalizzata – nelle principali regole compositive, geometriche-vincolari – per essere utilizzata sui principali poligoni regolari e nelle forme poliedriche su di essi fondate. L'intero disegno della formella presa in esame può considerarsi definito all'interno di uno modulo, avente forma di triangolo rettangolo, realizzato dividendo il quadrato lungo le sue diagonali e le sue mediane (fig. 6).
Il primo vincolo di carattere generale fissato nello sviluppo del modello generativo è che vi siano linee guida dell'apparato decorativo che abbiano origine e termine su punti scelti liberamente lungo i lati del triangolo. I punti sono inizialmente distribuiti uniformemente, così da favorire eventuali composizioni modulari/ritmiche, ma ognuno di essi può essere traslato arbitrariamente lungo il lato di appartenenza (fig. 7a). Come per il modello precedente, le linee di connessione fra due punti sono inizialmente rette e, espresse in termini di geometria digitale, sono curve NURBS di primo grado, poggiate a due punti di controllo, aventi peso uniforme uguale a 1. Queste linee hanno un ruolo di schematizzazione compositiva, ma non sono direttamente utilizzate ai fini della modellazione: verranno infatti prima trasformate in nuove curve NURBS di terzo grado e definite da cinque punti di controllo (fig. 7b). Queste quantità rappresentano un valore minimo, e nel contempo più che sufficiente, per controllare il percorso nello spazio della curva (P3) e la direzione e il modulo della tangente nei suoi punti iniziale e finale (P1-P2 e P5-P4) (fig. 7c). Inoltre, realizzando su cinque punti di controllo una NURBS del secondo grado, otterremo tre coniche collegate in continuità e, agendo opportunamente sul peso dei medesimi punti, potremo caratterizzare il nostro *pattern* con la presenza di cerchi, ellissi parabole e iperboli (fig. 8).
Nel motivo sviluppato come esempio si è scelto di impostare le tangenti delle curve, in corrispondenza dei punti finali, sempre perpendicolari ai lati di appartenenza. Una scelta derivata dalla volontà progettuale di ottenere in continuità di tangenza le superfici appartenenti al modulo triangolare originario con i moduli derivati per copia speculare e polare.
Le curve fin qui generate sono state abbinate a coppie e immaginate essere direttrici utili alla generazione di superfici *sweep*. In corrispondenza dei punti iniziali e finali di ognuna delle coppie individuate, è stata tracciata una retta, immaginando potesse assumere il ruolo di generatrice elementare, da associare alla direttrice cui appartiene, per la modellazione della superficie *sweep* (fig. 9a). In modo analogo a quanto già fatto in precedenza, le generatrici rette sono state trasformate in curve NURBS del terzo grado con cinque punti di controllo. Le curve così definite sono vincolate dal modello procedurale alle seguenti trasformazioni: i punti P1 e P5 possono muoversi esclusivamente lungo il lato del triangolo cui appartengono;

Fig. 6. O. Jones, *The Grammar of Ornament*, 1856, tavola 39. Suddivisione grafica del pattern n. 13 e individuazione del modulo di base.

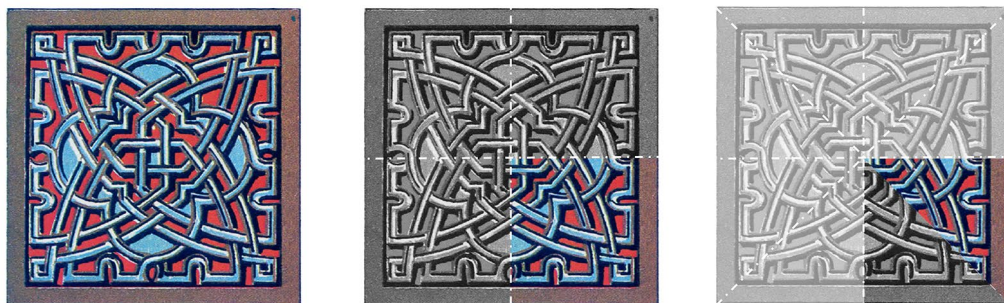



Fig. 7. Distribuzione delle direttrici utili alla generazione delle superfici del pattern: a) schema in forma di linee rette; b) trasformazione in NURBS delle linee rette; c) impostazione dei vincoli di tangenza delle curve. Elaborazione grafica degli autori.

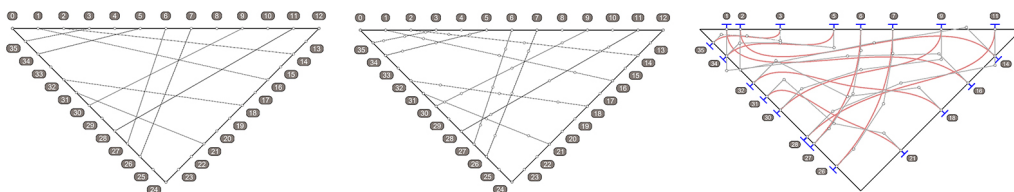
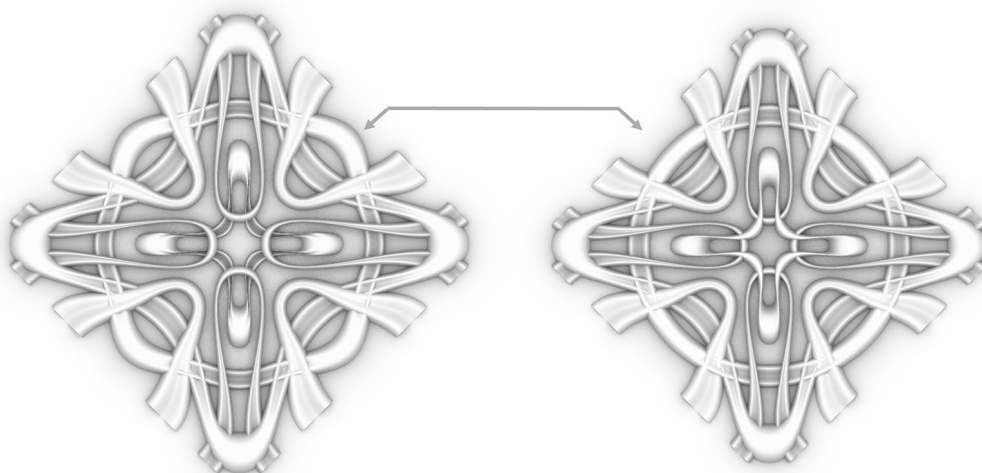



Fig. 8. Regolando opportunamente i parametri di una generica direttrice NURBS (a sinistra), è possibile trasformarla in una direttrice luogo geometrico (a destra): modifiche nelle superfici appartenenti. Elaborazione grafica degli autori.

i punti P2, P3 e P4 possono muoversi liberamente, restando appartenenti ad un piano verticale passante per la retta P1-P5; il piano di appartenenza di P2, P3 e P4, può ruotare attorno all'asse P1-P2 (fig. 9b, 9c, 10). Quest'ultimo vincolo consente di terminare la superficie del modulo con una svasatura, necessaria in quei casi nei quali si voglia collegare fra loro moduli in configurazioni non planari. Quanto definito per il modulo in forma di triangolo rettangolo, corrispondente alla frazione del quadrato, è direttamente replicabile su qualunque altro triangolo rettangolo, pertanto qualsiasi regola generativa definita può essere utilizzata per caratterizzare formalmente gli altri poligoni regolari (fig. 11). I modelli così generati possono naturalmente essere riprodotti e collegati in continuità secondo i principi di tassellazione del piano. Possono altresì essere utilizzati per caratterizzare le superfici di poliedri che hanno facce corrispondenti a poligoni regolari (fig. 12). In questo caso, il raccordo fra le superfici appartenenti ad un modulo con gli altri diversamente orientati nello spazio è stato risolto con due diverse soluzioni: la prima, in discontinuità di tangenza, prevede di utilizzare la svasatura della superficie prima illustrata; la seconda, in continuità di tangenza, inserisce una forma di raccordo realizzata da una superficie di rivoluzione, avente per asse il lato comune del poliedro e profilo di rivoluzione la generatrice della superficie da raccordare.

Conclusioni

I modelli procedurali generativi della forma, strutturati come esemplificato, hanno mostrato nel corso della sperimentazione di poter facilmente e rigorosamente ottemperare alla

Fig. 9. Definizione delle generatrici utili alla generazione delle superfici del pattern: a) generatrici di partenza in forma di linea retta; b) grafo procedurale di controllo; c) esempio di articolazione delle generatrici e immagine delle superfici corrispondenti. Elaborazione grafica degli autori.

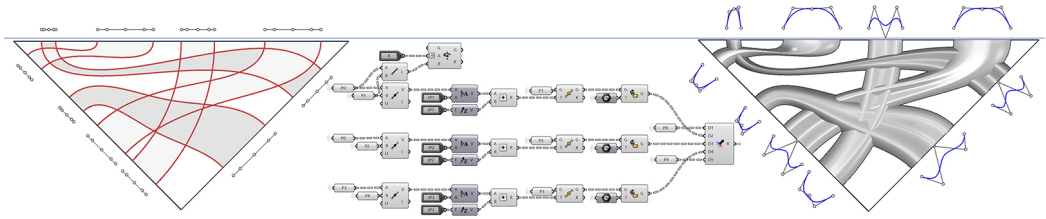



Fig. 10. Trasformazioni della superficie al variare dei punti di controllo delle generatrici: a) traslazione P2; b) traslazione P4; c) traslazione P3. Elaborazione grafica degli autori.

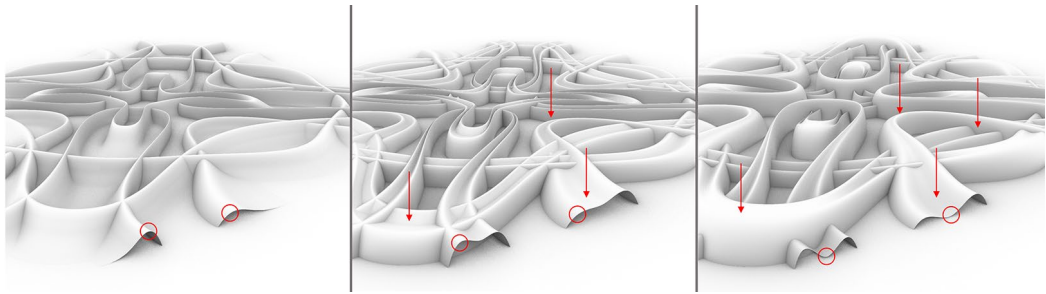



Fig. 11. Applicazione del pattern a diverse forme poligonali. Elaborazione grafica degli autori.

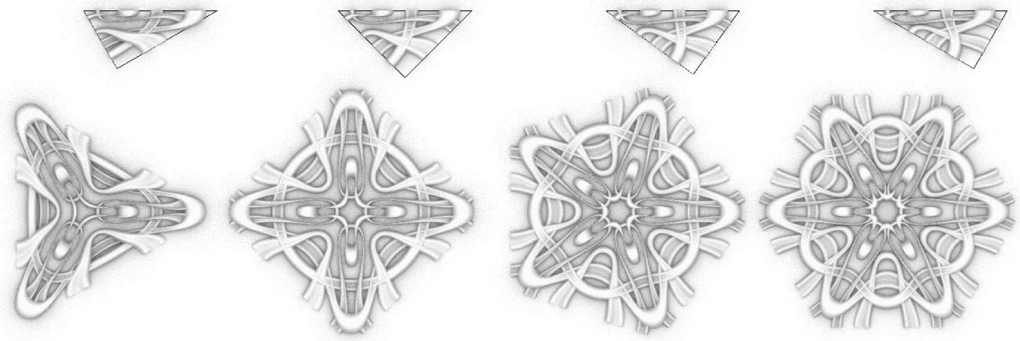
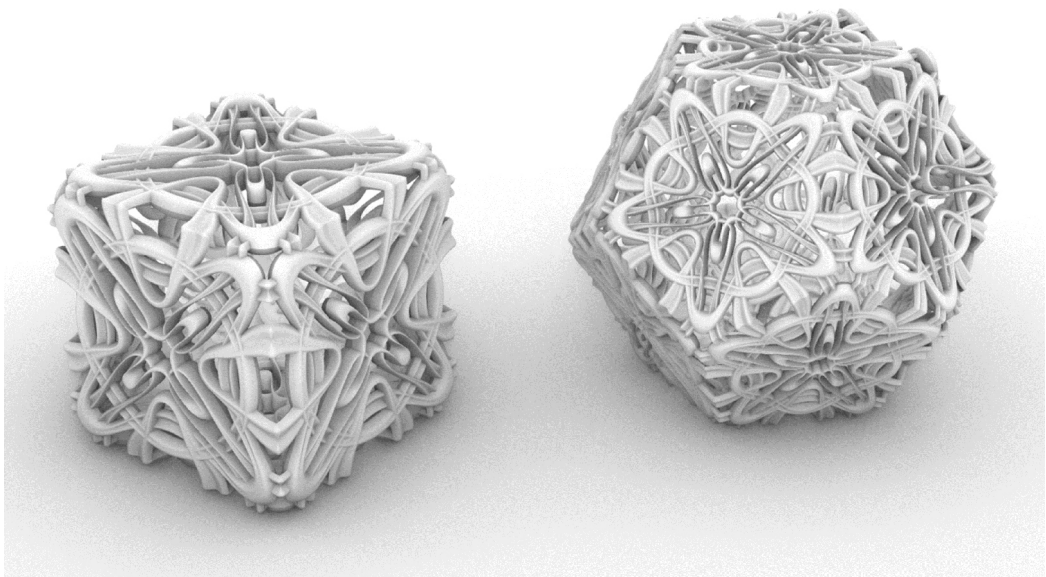



Fig. 12. Applicazione del pattern ad un esaedro e a un dodecaedro. Elaborazione grafica degli autori.

rappresentazione di complesse tipologie formali, che sono proprie degli apparati decorativi. La particolare architettura procedurale, appositamente concepita nella definizione di questi modelli procedurali, per mezzo dell'*ekphrasis* digitale, ha reso particolarmente manifesti i vantaggi derivanti dall'implementazione di una genesi formale concepita per mantenere separati, chiaramente indipendenti e – volendo – anche temporalmente distinti nella loro definizione: i vincoli geometrici, le figure geometriche e le loro dimensioni esistenziali. La descrizione esplicita delle relazioni instaurabili fra questi elementi induce, analiticamente o sperimentalmente, a conoscere pienamente tanto la forma ideata quanto quella osservata, ed è pertanto un fondamentale ausilio per il progetto e per il rilievo.
Con l'obiettivo di allargare ulteriormente il campo applicativo, nel prossimo futuro la metodologia di sviluppo del modello generativo sarà ulteriormente perfezionata, aumentando la varietà delle relazioni vincolari instaurabili fra le geometrie e consentendo di adagiare le forme generate su qualsiasi tipo di superficie.

Riferimenti bibliografici

Burrows R. (2016). *Shape Changing Polyhedra.* Jyväskylä: Bridges MathArt.

Burrows R. (2018). *A Design Method Based on Close-Packing Circles and Spheres of Multiple Sizes for Designers and Architects*. Stoccolma: Bridges MathArt.

Burrows R. (2019). Reconstructing Early Islamic Geometries Applied to Surface Designs. In S. Goldstine, D. McKenna, K. Fenyvesi (a cura di). *Bridges 2019 Conference Proceedings*. Linz, 16-20 luglio, pp. 163-170. Phoenix: Tessellation Publishing.

Ferrer-Pérez-Blanco I., Gámiz-Gordo A., Reinoso-Gordo J.F. (2019). New Drawings of the Alhambra: Deformations of Muqarnas in the Pendentives of the Sala de la Barca. In *Sustainability* 2019, vol. 11(2), 316.

Garofalo V. (2010). A methodology for studying muqarnas: the extant examples in Palermo. In *Muqarnas*, vol. 27, pp. 357-406.

Garofalo V. (2017). Visual Perception and Graphic Analysis. The Pattern of Inlays in the Cathedral of Palermo. In *Proceedings* 1, n. 9: 1085. Proceedings *of the International and Interdisciplinary Conference IMMAGINI? Image and Imagination between Representation, Communication, Education and Psychology.* Bressanone, 27–28 novembre 2017.

Grünbaum B., Shephard G. C. (1986). *Tilings and Patterns*. New York: W.H. Freeman & Company.

Jones O. (1856). *The Grammar of Ornament*. Londra: Day and Son Lithographers. <https://archive.org/details/grammarornament00Jone> (consultato il 10 gennaio 2023).

Pottmann H. (2007) *Architectural Geometry.* Exton: Bentley Institute Press.

Pottmann H., Eigensatz M., Vaxman A., Wallner J. (2015). Architectural geometry. In *Computers & Graphics*, vol. 47, pp. 145-164.

Pottmann H., Wallner J. (2017). Freeform Architecture and Discrete Differential Geometry. In W. Kropatsch, N. Artner, I. Janusch (a cura di). *Atti del 20° IAPR International Conference: Discrete Geometry for Computer Imagery*. Vienna, 19-21 settembre 2017, pp. 3-8. Cham: Springer.

Tedeschi A. (2011) *Parametric Architecture with Grasshopper*. Potenza: Le Penseur.

Ugarte-Urzúa J. P., Mhatre S., Bechthold M., Norman S. (2020). Extruded Tessellations: A novel structural ceramic system at the intersection of industrial ceramic extrusion and CNC fabrication. In *XXIV International Conference of the Iberoamerican Society of Digital Graphics*. Medellín, 18-20 novembre 2020, pp. 326-333. Sao Paulo: Blucher.

Valenti G.M. (2022) *Di segno e modello. Esplorazioni sulla forma libera fra disegno analogico e digitale*. Roma: FrancoAngeli.

Wallner J., Pottmann H. (2011). *Geometric computing for freeform architecture*. Journal of Mathematics in Industry 1-4. <https://mathematicsinindustry.springeropen.com/counter/pdf/10.1186/2190-5983-1-4.pdf> (consultato il 15 gennaio 2023).

Autori
Jessica Romor, Sapienza Università di Roma, jessica.romor@uniroma1.it
Graziano Mario Valenti, Sapienza Università di Roma, grazianomario.valenti@uniroma1.it

Per citare questo capitolo: Romor Jessica, Valenti Graziano Mario (2023). Modelli procedurali per l'ideazione, il controllo e la generazione della forma libera negli apparati decorativi/Procedural Models for the Conception, Control and Generation of Free Form in Decorative Apparatuses. In Cannella M., Garozzo A., Morena S. (a cura di). *Transizioni. Atti del 44° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Transitions. Proceedings of the 44th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 3091-3108.

Copyright © 2023 by FrancoAngeli s.r.l. Milano, Italy

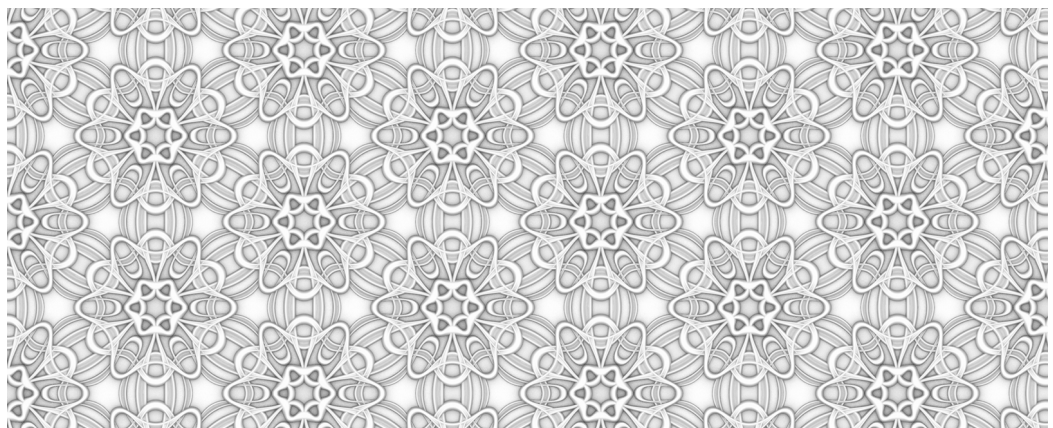
Isbn 9788835155119

Procedural Models for the Conception, Control and Generation of Free Form in Decorative Apparatuses

Jessica Romor
Graziano Mario Valenti

Abstract

From the outset, the design of decorative apparatuses – both on the architectural scale and on that of the industrial product – has frequently experimented with the use of the free form, being limitedly affected by problems of a structural or functional nature: both alone and articulated inside of modular patterns, in a game of relationships with other locus shapes. The need to control and represent the geometries of a decorative apparatus – during the conception (project) or knowledge (survey) phase – has motivated the search of a methodology for the definition and development of generative procedures useful for three-dimensional modelling of its shape. The solution adopted favours a descriptive method of digital *ekphrasis* in which the geometric constraints are distinct and prioritized with respect to the forms related to them. This strategy allows for a high level of personalization and versatility of the generated form, as well as the combined use of free forms and locus forms, the seconds understood as a singularity of the firsts. The exemplary models tested drew inspiration from some decorative patterns typical of Islamic culture: the models, initially studied in the context of a single regular polygon, were subsequently perfected to be used in the tessellation of the plane and in the characterization of the surfaces of Platonic and Archimedean solids.

Keywords
Decoration, Pattern, Free form, NURBS, Visual Programming Language

Example of tessellation of the plane. Graphic elaboration by the authors.

doi.org/10.3280/oa-1016-c455

Introduction

The development and use of increasingly sophisticated tools for the representation and construction of every type of product – from the scale of the object to that of the building – has led, over time, to an exponential growth in the possibilities of conceiving and expressing the form. A form whose representation, no longer dependent on the instrumental and operational limits of traditional drawing (due to straightedge and compass), can go beyond the existential sphere of geometric loci to manifest itself in full freedom.
Such an evolution, in order to become fully positive, cannot be limited to the intuitive use of innovative tools and techniques, however artificially intelligent they may be: if we intend to maintain intellectual control of the genesis of the form and its geometric nature, it is necessary to develop in parallel the awareness of those who work with it.
Therefore, the need to deepen the ideational (project) and cognitive (survey) processes of the form appears relevant, considering two aspects in parallel. On the one hand, the process of transition from the imagined form to its synthetic transposition; on the other, the transition from a logic for geometric loci to one in which, also thanks to them, we can control free form.

From freedom to degrees of freedom: shape transitions

In contemporary design, the term 'free form' – "Not created according to standard forms or structures", as we can read in *Oxford Dictionary* – has taken on considerable importance, as if to take to the extreme the very great freedom of expression that current design and construction technologies can achieve, without having to limit oneself to directly controllable geometries. In the process of reading the form, it refers to what cannot be traced back to geometric places, to formal structures that can be expressed analytically, and for which it is therefore not possible to trace a law or a system of laws capable of determining the geometric nature of an object in each of its parts continuously.
In this term there is a great lexical ambiguity, particularly evident when the free form is used for the design of an industrial product or architecture and is 'engineered' digitally. The ambiguity arises from the consideration that a free form, to be produced or set in the building site, requires a series of control steps, which include a real redesign, such as to place so many constraints that at the end of the process it would seem strange to continue calling it free form.
A solution, pursued by us and by various other researchers and designers, is to be found in the apparent oxymoron of 'control of the free form', where with this action we want to identify those processes of redesigning a conceived sign, not easy to describe from a geometrical point of view, able to analyse, enhance and make unequivocally repeatable this sign for constructive purposes, without betraying its original intent and communicative force [Pottman 2007; Pottman 2015; Pottman 2017].
Starting from any free form, considered continuous in its singularity, we detect in a discrete and critical way the characteristics, the relationships between the parts into which it can be broken down (proportions, concavity/convexity, symmetries, continuity, directions/positions, etc.) which make it possible to obtain a posteriori the rules of genesis and composition of the form: the constraints which determine its degrees of freedom [Valenti 2022]. In fact, if we think of free-form surfaces in architecture and design, it is clear how such constraints are essential to facilitate their construction, when aimed, for example, at identifying straight rods, flat quadrangular pieces and in absence of torsion [Pottman 2007; Pottman 2015; Pottman 2017].
Therefore, given this transition from freedom to degrees of freedom – typical of the a posteriori discretization of the free form, which moves from complexity towards synthesis – we propose here a direct methodology for the conception of free form, precisely starting, vice versa, from a series of constraints and procedural rules of formal genesis – identified for a specific application case – set a priori. Having described the rule in the form of digital

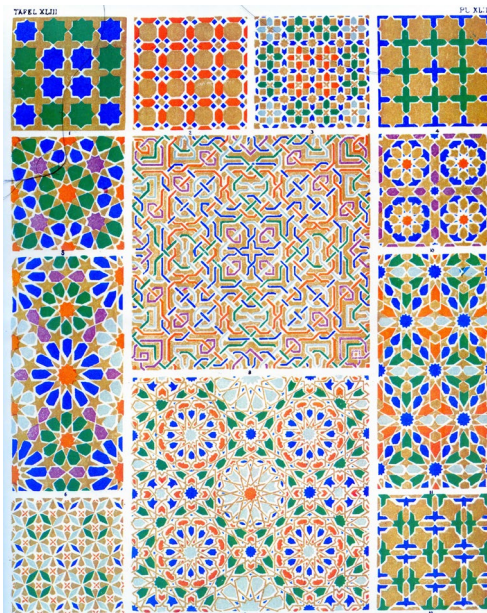
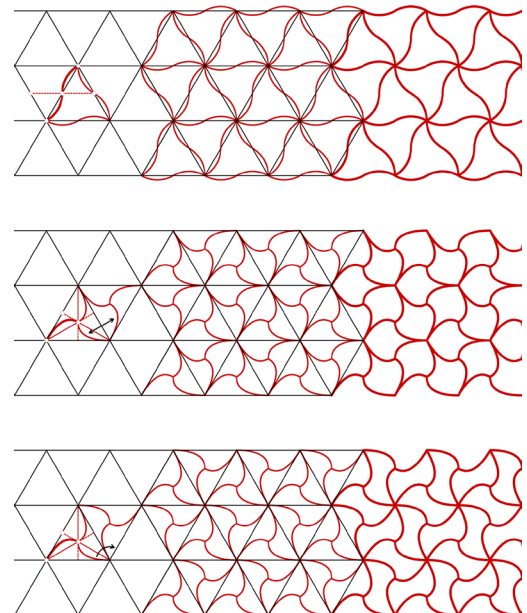



Fig. 1. Islamic decorations. Jones 1856, plate 43.

Fig. 2. Schematization of different types of patterns generated by the evolution of the same equilateral triangular grid. Graphic elaboration by the authors.

ekphrasis, with the help of visual programming systems (VPL), it is easy to start from one solution and then explore and derive infinite others, thus creating parametric models capable of satisfying the most various application needs.
Starting from these assumptions, the research object of this contribution illustrates a theoretical and methodological path of construction of three-dimensional elements, created with generative procedures based on the parametric and formal control of free geometries, aimed at the maximum expressive variety.

On the procedural description for decoration

Given the interest in the generation of single free-form product, this methodology has enormous application potential in the production of decorative elements, both on the small scale of the industrial product and on the large scale of architecture. In fact, procedural modeling and numerically controlled rapid prototyping systems have re-launched the possibility of giving new life and new form to the decorative qualities of the project [Tedeschi 2011], which have long been largely neglected due to cultural settings and economic convenience. We have chosen to apply experimentation to the theme of patterns, in continuity with a centuries-old decorative tradition in which geometric control has undoubtedly played a fundamental and decisive role [Jones 1856; Grunbaum 1986; Garofalo 2017; Burrows 2018; Burrows 2019]. Let us think, for example, of the vast heritage of Islamic geometric motifs (figs. 1, 2), which with skill and originality explore the interactions of horizontal, vertical, inclined and curved lines, in two-dimensional space, in a 'branches-roots' system in which each element is connected to the others and cannot be removed, paying constant attention to checking the continuity between the elements [Jones 1856]. The tessellation of the plane takes place through aggregations of points, lines, angles, grids, polygons and tangent circumferences of different sizes and other systems that anticipated the introduction of fractals and vectors, organized according to precise schemes that can be divided into geometric grids, subdivisions tessellated polygons, radial structures, tangent circles, aggregation of nested polygons, modular tessellations [Burrows 2016; Burrows 2018; Burrows 2019]. Furthermore, it is natural to also consider the transposition of these geometric logics into three-dimensional space, operating through aggregations of spheres, polyhedrons and prisms [Burrows 2018] which describe three-dimensional transitions between different architectural partitions [Garofalo 2010]. Indeed, it is precisely from these geometric schemes, and from the tessellation principles of the plane and space, that we are going to draw sys-

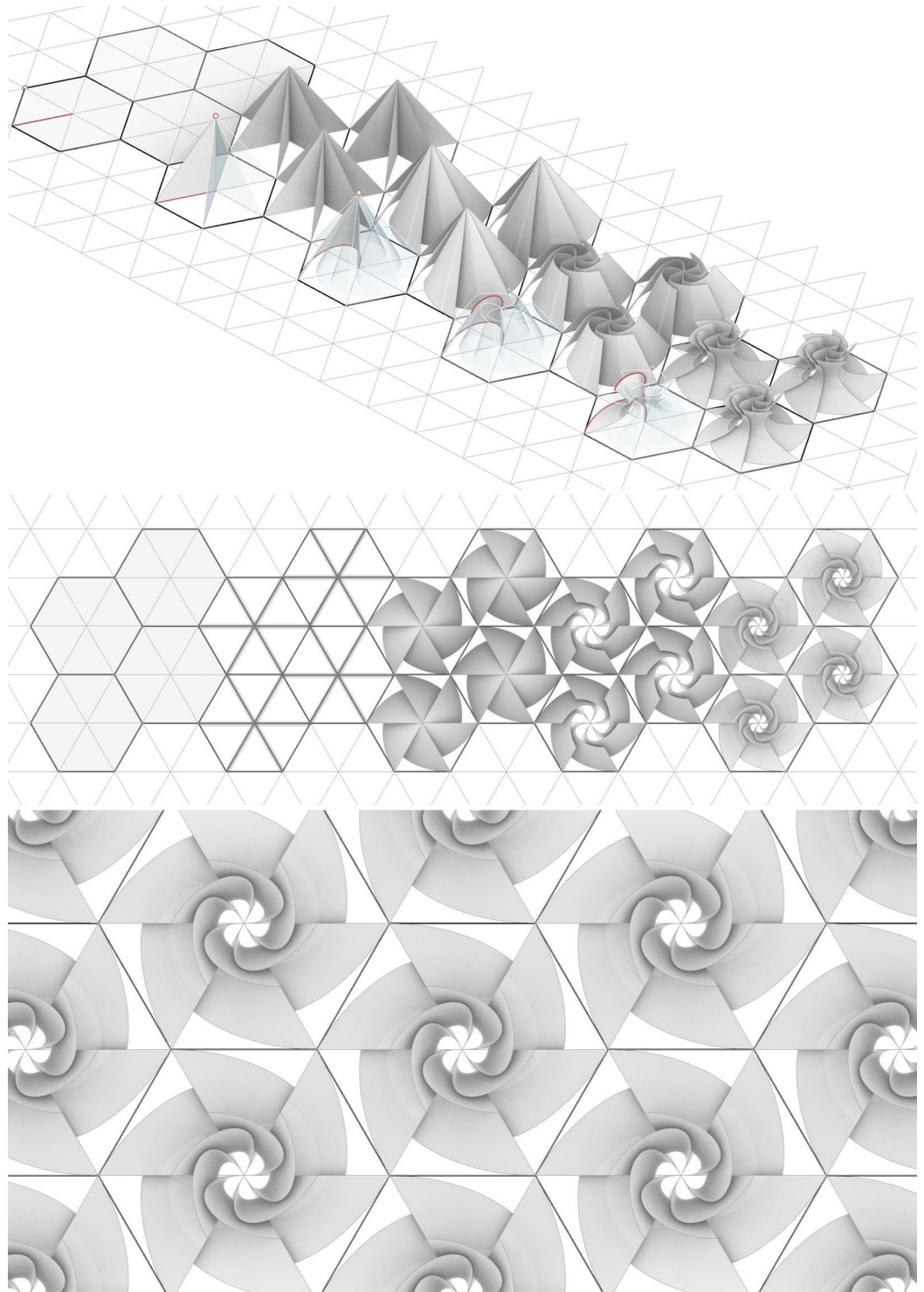



Fig. 3. Exemplification of transition from a simple geometric locus shape to a more complex, free-form, but appropriately constrained one. Graphic elaboration by the authors.

tems of constraints, intended as an expression of a series of geometric conditions that will determine the degrees of freedom of the designed forms, both plane, as in space, and in its temporal evolution.
Before moving on to the actual experimentation, we will use a preparatory example to start thinking about how a regular, rigid and continuously controlled structure can generate a system of constraints capable of creating a shape with certain degrees of freedom, through a path of transition that starts from a simple geometric locus (fig. 3). Suppose we start from a hexagonal monohedral tessellation, for which we want to create a decorative

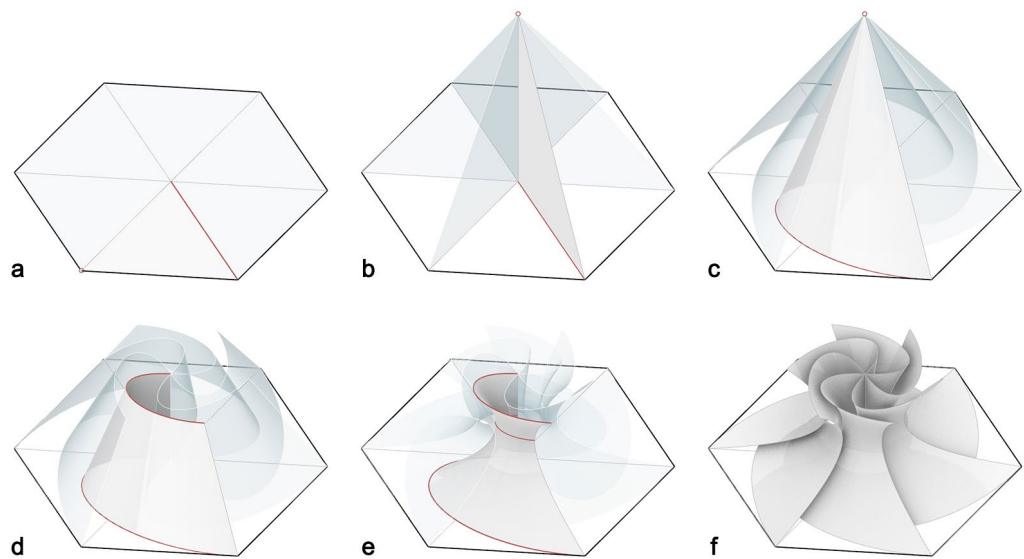



Fig. 4. Applying constraints upstream and on-going in the transition to creating a free form. Graphic elaboration by the authors.

pattern that repeats itself in each polygon. Let us therefore focus our attention on a single hexagon, considering its flat surface. The first design choice consists in the radial subdivision of the polygon into the six equilateral triangles that compose it, each of which will be subjected to a transformation process controlled by constraints, identified a priori or generated in progress (fig. 4). The first transformation consists in overturning each triangle in space along the axes of the hexagon (fig. 4b). Then, we modify the base of the triangle, which becomes a cubic curve included in a control polygon whose vertices and segments are placed in a specific relationship with the starting hexagon in order to control incidences and tangents (fig. 4c). The triangular surface, regenerated, becomes a cone, which is then truncated with a plane at a given height (fig. 4d). Let us now obtain an ongoing constraint, by sectioning the cone again with a plane that allows us to obtain an intermediate curve, to be subjected to a further modification operation, by relocating the control points (fig. 4e). Finally, we regenerate the surface by interpolation using the new section curve and complete the model through suitable operations of radial symmetry (fig. 4f) and translation.

Experimentation

The applicative experimentation was articulated in the creation of two exemplifying procedural models. The first takes its origin from an hexagonal pattern, whose design has been 'increased' to evolve from two-dimensional to three-dimensional space and from the locus shape to the free form. The second, similarly, achieves the same objectives and, by significantly increasing the separation between the constraint and the geometric shape associated with it, makes the generalization of the generative process of the shape and the expressive and applicative variety achievable with it even more evident.
In both cases, we note how the free form, transformed in its appearance, can in a few instants coincide with the geometric locus shape: this condition, derived from the theory of the representation of NURBS curves and surfaces, supports the 'generalized' vision of the geometric locus as a singular case of free form.
Specifically in the first application case, the starting hexagonal module was divided into six parts, according to the diagonals; each of the derived triangles was further divided into two parts, thus generating a trapezoid and a triangle. In the development of generative logic, we established the following evolutionary principles: the vertices of the triangle can move along the Z axis; the longer side of the trapezoid can evolve into a pair of specular conics connected in continuity of tangency (cyma); the smaller side of the trapezoid can be transformed into a conic. The transformation from a straight line into a conic also occurs for the projections, on the main XY plane, of the cathetus of the triangle and the oblique sides of the trapezoid. These curves are

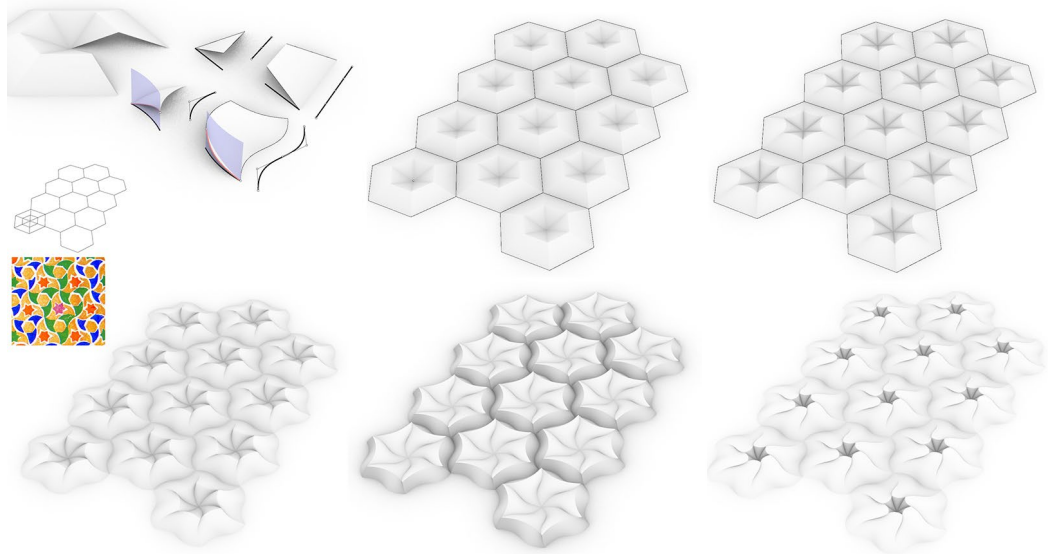



Fig. 5. Geometric structure of the basic module and examples of its variation. Graphic elaboration by the authors.

extruded in the form of cylinders, so as to identify the corresponding geodesic curves on them necessary to connect the vertices of the surfaces located at different heights in space (fig. 5).
The second application case instead takes inspiration from a single decorative tile, represented in the original sources in the form of a square and generalized by us – in the main compositional, geometric-binding rules – to be used on the main regular polygons and in the polyhedral shapes on them founded. The entire design of the tile under examination can be considered defined within a module, having the shape of a right-angled triangle, created by dividing the square along its diagonals and medians (fig. 6). The first constraint of a general nature established in the development of the generative model is that there are guidelines of the decorative apparatus that originate and end on freely chosen points along the sides of the triangle. The points are initially distributed uniformly, so as to favor any modular/rhythmic compositions, but each of them can be moved arbitrarily along the side they belong to (fig. 7a). As for the previous model, the connecting lines between two points are initially straight and, expressed in terms of digital geometry, are NURBS curves of first degree, resting on two control points, having uniform weight equal to 1. These lines have a role of compositional schematization, but they are not directly used for modeling purposes: in fact, they will first be transformed into new third-degree NURBS curves and defined by five control points (fig. 7b). These quantities represent a minimum value, and at the same time more than sufficient, to control the path in space of the curve (P3) and the direction and module of the tangent in its initial and final points (P1-P2 and P5-P4) (fig. 7c).
Furthermore, by creating a NURBS of the second degree on five control points, we will obtain three continuously connected conics and, by suitably acting on the weight of the same points, we will be able to characterize our pattern with the presence of circles, ellipses, parabolas and hyperbolas (fig. 8).
In the motif developed as an example, we decided to set the tangents of the curves, in correspondence with the final points, always perpendicular to the sides they belong to. A choice derived from the design desire to obtain in continuity of tangency the surfaces belonging to the original triangular module with the derived modules for specular and polar copying.
The curves generated so far have been combined in pairs and imagined to be useful directrices for the generation of sweep surfaces. In correspondence with the initial and final points of each of the identified pairs, we drew a straight line, imagining it could assume the role of elementary generatrix, to be associated with the directrix to which it belongs, for the modeling of the sweep surface (fig. 9a). Similarly, to what has already been done previously, the straight lines have been transformed into NURBS curves of the third degree with five control points. The curves thus defined are bound by the procedural model to the following transformations: points P1 and P5 can only move along the side of the triangle to which they belong; the points P2, P3 and

Fig. 6. O. Jones, *The Grammar of Ornament*, 1856, plate 39: graphic subdivision of pattern n. 13 and identification of the basic module.

Fig. 7. Distribution of the directrices useful for the generation of the pattern surfaces: a) scheme in the form of straight lines; b) transformation of straight lines into NURBS; c) setting the tangency constraints of the curves. Graphic elaboration by the authors.

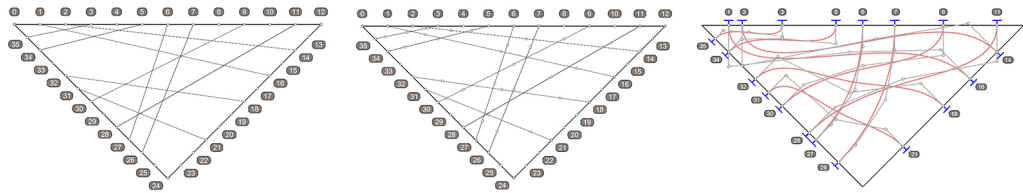
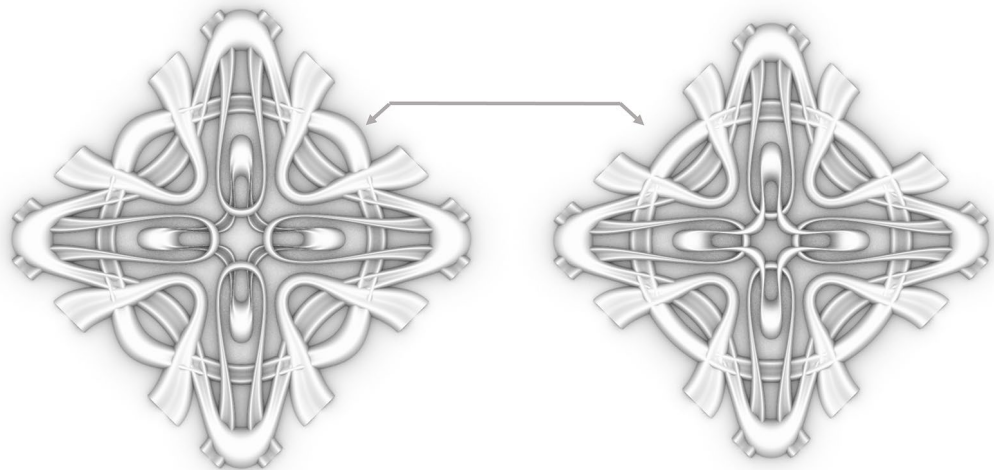



Fig. 8. By suitably adjusting the parameters of a generic NURBS directrix (on the left), it is possible to transform it into a locus directrix (on the right): changes in the surfaces belonging. Graphic elaboration by the authors.

P4 can move freely, remaining belonging to a vertical plane passing through the straight line P1-P5; the plane belonging to P2, P3 and P4 can rotate around the P1-P2 axis (fig. 9b, 9c, 10). This last constraint allows to finish the surface of the module with a flaring, necessary in those cases in which you want to connect modules to each other in non-planar configurations.
What is defined for the module in the form of a right-angled triangle, corresponding to the fraction of the square, can be directly replicated on any other right-angled triangle, therefore any generative rule defined can be used to formally characterize the other regular polygons (fig. 11). The models thus generated can naturally be reproduced and connected continuously according to the tessellation principles of the plane. They can also be used to characterize the surfaces of polyhedra which have faces corresponding to regular polygons (fig. 12). In this case, the connection between the surfaces belonging to one module with the others differently oriented in space was solved with two different solutions. The first, in tangent discontinuity, involves using the flaring of the surface illustrated above; the second, in continuity of tangency, inserts a form of connection created by a surface of revolution, having as axis the common side of the polyhedron and profile of revolution the generatrix of the surface to be connected.

Conclusions

The generative procedural models of the form, structured as exemplified, have shown during the experimentation that they can easily and rigorously comply with the representation of complex formal typologies, which are typical of decorative apparatuses. The particular proce-

Fig. 9. Definition of the generatrices useful for the generation of the pattern surfaces: a) starting generatrices in the form of a straight line; b) procedural control graph; c) example of articulation of the generatrices and image of the corresponding surfaces. Graphic elaboration by the authors.

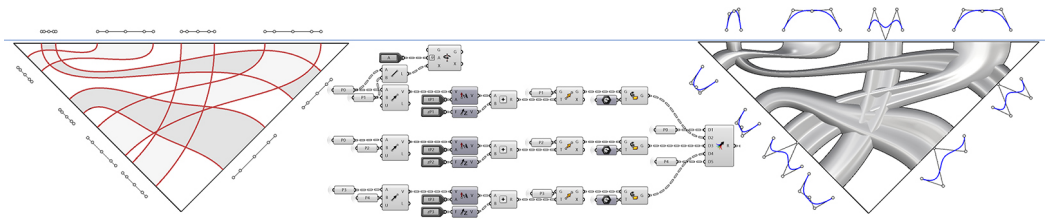



Fig. 10. Transformations of the surface as the control points of the generatrices vary: a) translation P2; b) translation P4; c) translation P3. Graphic elaboration by the authors.

Fig. 11. Applying the pattern to different polygonal shapes. Graphic elaboration by the authors.

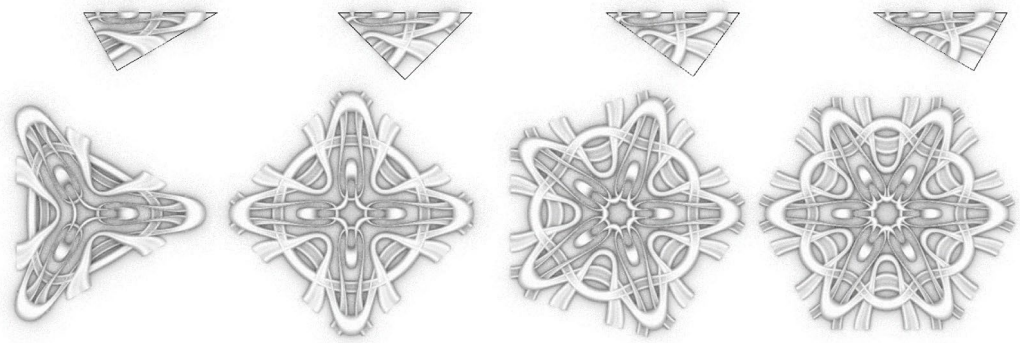
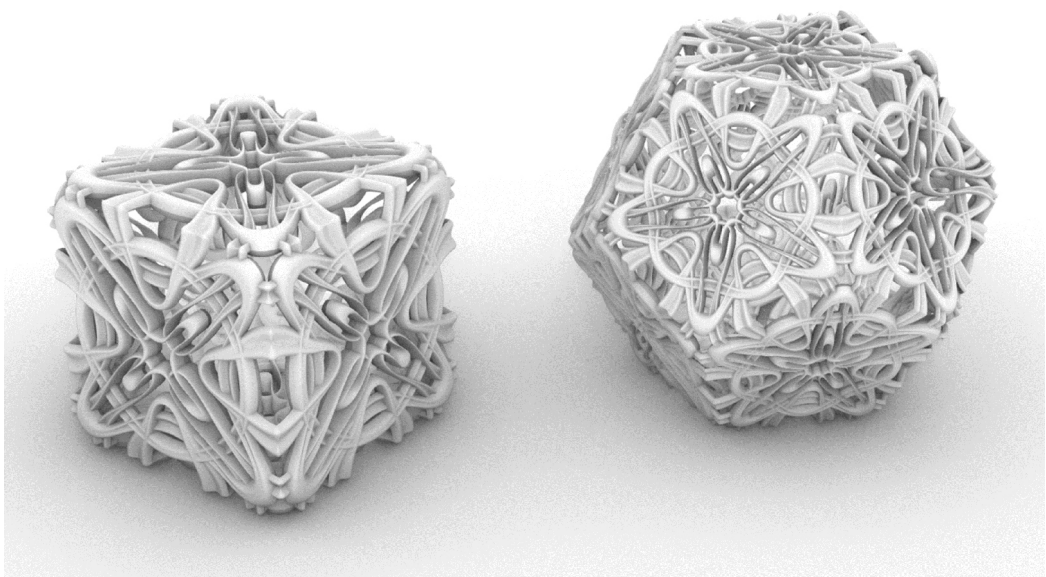



Fig. 12. Applying the pattern to a hexahedron and a dodecahedron. Graphic elaboration by the authors.

dural architecture, expressly conceived in the definition of these procedural models by means of digital ekphrasis, has made manifest the advantages deriving from the implementation of a formal genesis conceived to keep separate, clearly independent and – if desired – also temporally distinct in their definition: geometric constraints, geometric figures and their existential dimensions. The explicit description of the relationships that can be established between these elements leads, analytically or experimentally, to fully know both the conceived form and the observed one, and is therefore a fundamental aid for the project and for the survey.
With the aim of expanding the field of application, in the near future the development methodology of the generative model will be further perfected, increasing the variety of constraining relationships that can be established between the geometries and allowing the generated forms to be placed on any type of surface.

References

Burrows R. (2016). *Shape Changing Polyhedra.* Jyväskylä: Bridges MathArt.

Burrows R. (2018). *A Design Method Based on Close-Packing Circles and Spheres of Multiple Sizes for Designers and Architects.* Stockholm: Bridges MathArt.

Burrows R. (2019). Reconstructing Early Islamic Geometries Applied to Surface Designs. In S. Goldstine, D. McKenna, K. Fenyvesi (Eds.). *Bridges 2019 Conference Proceedings*. Linz, 16-20 July, pp. 163-170. Phoenix: Tessellation Publishing.

Ferrer-Pérez-Blanco I., Gámiz-Gordo A., Reinoso-Gordo J.F. (2019). New Drawings of the Alhambra: Deformations of Muqarnas in the Pendentives of the Sala de la Barca. In *Sustainability* 2019, Vol. 11(2), 316.

Garofalo V. (2010). A methodology for studying muqarnas: the extant examples in Palermo. In *Muqarnas*, Vol. 27, pp. 357-406.

Garofalo V. (2017). Visual Perception and Graphic Analysis. The Pattern of Inlays in the Cathedral of Palermo. In *Proceedings* 1, n. 9: 1085. Proceedings *of the International and Interdisciplinary Conference IMMAGINI? Image and Imagination between Representation, Communication, Education and Psychology.* Brixen, 27–28 November 2017.

Grünbaum B., Shephard G. C. (1986). *Tilings and Patterns*. New York: W.H. Freeman & Company.

Jones O. (1856). *The Grammar of Ornament*. London: Day and Son Lithographers. <https://archive.org/details/grammarornament00Jone> (accessed 10 January 2023).

Pottmann H. (2007) *Architectural Geometry.* Exton: Bentley Institute Press.

Pottmann H., Eigensatz M., Vaxman A., Wallner J. (2015). Architectural geometry. In *Computers & Graphics*, Vol. 47, pp. 145-164.

Pottmann H., Wallner J. (2017). Freeform Architecture and Discrete Differential Geometry. In W. Kropatsch, N. Artner, I. Janusch (Eds.). *20th IAPR International Conference: Discrete Geometry for Computer Imagery. Conference proceedings*. Wien, 19-21 September2017, pp. 3-8. Cham: Springer.

Tedeschi A. (2011) *Parametric Architecture with Grasshopper*. Potenza: Le Penseur.

Ugarte-Urzúa J. P., Mhatre S., Bechthold M., Norman S. (2020). Extruded Tessellations: A novel structural ceramic system at the intersection of industrial ceramic extrusion and CNC fabrication. In *XXIV International Conference of the Iberoamerican Society of Digital Graphics*. Medellín, 18-20 November 2020, pp. 326-333. Sao Paulo: Blucher.

Valenti G.M. (2022) *Di segno e modello. Esplorazioni sulla forma libera fra disegno analogico e digitale*. Rome: FrancoAngeli.

Wallner J., Pottmann H. (2011). *Geometric computing for freeform architecture*. Journal of Mathematics in Industry 1-4. <https://mathematicsinindustry.springeropen.com/counter/pdf/10.1186/2190-5983-1-4.pdf> (accessed 15 January 2023).

Authors
Jessica Romor, Sapienza Università di Roma, jessica.romor@uniroma1.it
Graziano Mario Valenti, Sapienza Università di Roma, grazianomario.valenti@uniroma1.it

To cite this chapter: Romor Jessica, Valenti Graziano Mario (2023). Modelli procedurali per l'ideazione, il controllo e la generazione della forma libera negli apparati decorativi/Procedural Models for the Conception, Control and Generation of Free Form in Decorative Apparatuses. In Cannella M., Garozzo A., Morena S. (Eds.). *Transizioni. Atti del 44° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Transitions. Proceedings of the 44th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 3091-3108.

Copyright © 2023 by FrancoAngeli s.r.l. Milano, Italy

Isbn 9788835155119